

实例化视域下的知识构建：以“勾股定理”在古代文献中的表征为例

夏立

深圳职业技术学院，中国

摘要

本文以“勾股定理”在古代文献中的各个表征为切入点，使用“实例化”的方法，探讨勾股定理在西方文献《几何原本》与古代中国文献《周髀算经》的不同表征方式。本文将“实例化”这一语言学概念应用于汉语文本特别是古代汉语文本的分析中，提出“实例化”是讨论抽象知识与实体表征的有效方法，而这种方法也可以应用于古代汉语文本中。本文还将“实例化”应用于西方文献，特别是英文文献中对于“毕达哥拉斯定理”的表征进行分析。本文认为不同语言对于同一知识在表征形式上的不同，只是不同的实例化体现。各个实例化表征本身是可以通过语境依赖程度进行描述。本文采用“同一知识”加“不同表征”这一分析思路，尝试分析并理解知识和实例之间的关系。

关键词

实例化，勾股定理，古代数学文本，多模态表征，知识构建

1. 引言

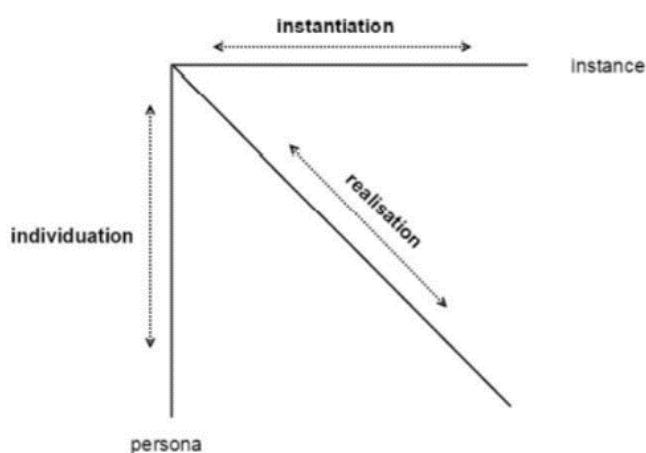
“勾股定理”作为几何学中的经典定理，描述了直角三角形中斜边和直角边的关系，被认为是科技史上最重要的定理之一。这个定理，在中国学术界称之为“勾股定理”，而在西方学界则称为“毕达哥拉斯定理”(Pythagoras Theorem)。学术界对于该定理的命名权归属始终都有争论(章鸿钊, 1951; 程纶, 1951; 蔡宗熹, 2009; Posamentier, 2010)，而在中学数学教育领域，对于该话题的讨论，也一直是各数学教材中的常青话题(例如: Wong & Wong, 2009)。中国学者的论据来源主要是中国古代的著名数学著作《周髀算经》。《周髀算经》作者已不可考，约成书于公元前 100 年左右(江晓原, 2015)，大概是我国古代的西汉时期。该书是中国古代最早的一部“以完备面目呈现的数理天文学专著”(江晓原, 2015, p.3)，若考虑其以“托引”的方式，记述遥远年代发生的事件，则书中记载的事件的发生时间则更为久远。《周髀算经》中共有三处使用了托引的方式记载了同勾股定理相关的内容。而这三处记载中，发生于公元前 1120 年(西周时期)，周公和商高的谈话是谈及勾股定理最经典的特例“勾三股四弦五”的最早记录。这个案例也是目前学界经常用以佐证该定理应命名为“勾股定理”的重要依据。学术上通常与“勾股定理”做类比的“毕达哥拉斯定理”，出自同样为记述性质的西方数学经典著作《几何原本》，由古希腊著名数学家欧几里得所著。《几何原本》约成书于公元前 300 年左右，大概是我国的战

国时期。《几何原本》中记述的毕达哥拉斯定理出现于约公元前 500 年左右, 大概是我国的春秋时期。如果以《周髀算经》和《几何原本》最早记录该定理的时间进行计算, “勾三股四弦五”的特例要早于毕达哥拉斯定理约 600 年。

2. 理论框架

本文依托系统功能语言学理论, 该理论提供了认识语言现象的三种互补的维度: “体现化, 个体化和实例化”(realisation, individuation and instantiation) (Martin, 2008, p. 37)。图 1 为 Martin (2008, p.37) 所绘制的三种维度之间的互补关系图。

图 1. 系统功能语言学视域下的三种互补的分析维度



这三个维度中, “体现化”(realisation) 重点关注语言现象中从意义到形式的转变过程, 以及语言内部的语义、语音和语法现象 (Kress, 2007, p.17)。相较于另外两个维度, “体现化”这个维度是系统功能语言学者最关注的 (Martin, 2006, p.276)。个体化 (individuation) 的关注点落在个人。在教育领域, “个体化”可以用来描述同一教学环境中, 不同学生对于同一知识的掌握情况。实例化 (instantiation) 由韩礼德首先提出 (Halliday, 1991, 2007)。该维度可以用来描述 “系统”(system) 和 “实例”(instance) 之间的关系, 在教育领域, 特别是应用在知识构建领域, 实例化 (instantiation) 作为模型, 其可以作为解释抽象和具体的关系。例如 Xia (2018), 就是讨论作为抽象知识的 “勾股定理” 是如何以不同的实例, 在香港中学数学课程标准、课程大纲、教材和考试中呈现的。其依据的解释原理就是同一知识是如何以不同的表征形式, 在不同类型的教育文本中呈现的。各种表征所呈现的根本原理是受限于其所处的文本背后的语境, 也就是说, 各种类型的文本的呈现是依赖于语境的。比如说, 勾股定理在问题中的呈现方式就是 “模糊” (vague) 和 “不完整” (incomplete) (Xia, 2021), 学生是需要借由其他辅助手段 (例如辅助线、其他的层级化知识 (hierarchy of knowledge) 帮助其理解 “勾股定理” 在问题中是如何表意的。实例化作为解释的模型, 还可以应用于翻译领域 (Chang, 2011; de Souza, 2010; 王汐, 2018; Wang, 2021), 使用实例化可以讨论一个意义如何由多个实例进行展示即: 实例化在同一知识的不同表征上的解释作用, 以及实例化可以作为分析手段, 将不同语种之间的文本视作不同形式的实例, 本文认为, 实例化也可以作为分析手段, 应用于对于勾股定理在古代数学著作中的不同表征。因为作为同一知识的 “勾股定理” 保持恒定, 该分析方法, 既可以讨论《周髀算经》中的各种实例化案例, 也可以延展至对《几何原理》中实例的分析。

3. 研究方法和分析框架

本文所采用的研究方法是基于典型案例的文本分析方法。从重要性上来说,本文所分析的同勾股定理相关的文本来源于《周髀算经》和《几何原本》,各自为中西方古代科学文献中的里程碑式著作,都在其领域内具有重大影响力。现有的关于同勾股定理命名权之争的相关研究,所参考的文献依据,也基本来源于上述两本著作。因此本文选取上述两本著作中同勾股定理相关的实例进行讨论,具有研究的重要性。从文本的构成来说,本文所涉及的分析实例包括了《周髀算经》上以古汉语写就的勾股定理实例,《几何原本》上的英文译本,同时为做相关阐释和说明,本文还会选取目前广泛应用于数学教学的相关案例作为衡量的指标。

本文所采用的分析框架为实例化视域下的文本分析框架。在同数学相关的文本分析类的研究中,Xia (2018) 依托实例化作为分析维度,以 Painter 和其同事 (Painter, Martin and Unsworth, 2012) 所提出的“贡献”(Commitment) 作为其分析实例化的指标。系统功能语言学视域下的意义构成分作三类:概念意义 (Ideational Meaning), 人际意义 (Interpersonal Meaning) 和谋篇意义 (Textual Meaning)。将这三种意义同贡献相结合,也产生了三种不同关注点的贡献类型:概念贡献 (Ideational Commitment), 人际贡献 (Interpersonal Commitment) 和谋篇贡献 (Textual Commitment)。Xia (2018), 使用了概念贡献,讨论了作为抽象概念的“勾股定理”是如何在课程大纲、教学指导、教材和考试试题中进行实例化。在 Xia (2018) 的研究中,每个实例的概念贡献的不同手段,代表了每个实例对于“勾股定理”这一特定知识的不同的语境依赖程度。比如说:课程大纲中勾股定理的概念贡献是通过图表和归纳的方式陈述“勾股定理”同其他数学知识之间的从属或并列关系,虽然在课程大纲中的勾股定理仅是一个专有名词,但是其可以独立存在,因此“勾股定理”这一特定名词在课程大纲中实例化之后的语境依赖程度也最低。在对考试试题进行概念贡献分析的过程中,需要不断地进行图像和文本中的“参与者”(participants),“过程”(process) 和“环境”(circumstance) 的概念贡献的分析,甚至还要借助“辅助线”的方式,将作为核心知识是隐藏在考试试题中“勾股定理”进行具象化的处理 (Xia, 2021), 否则“勾股定理”就将以一种“模糊”和“不完整”的方式,在考试试题中进行实例化,故而“勾股定理”在考试试题中的语境依赖程度最高。概念贡献作为补足实例化的分析指标,可以帮助我们理解各个数学文本的语境依赖程度。同时,由于数学文本中常见的多模态现象,Xia (2018) 还借鉴了 O'Halloran (2007) 中针对数学案例所提出的语义分析框架。具体来说,相较于其他学科的文本来说,数学文本中常见的表意资源除了使用语言文字之外,还会通常使用图像和符号。O'Halloran 于是给出了分析数学案例的三个步骤,第一:并置和空间布局 (Juxtaposition and Spatiality) 用于确认案例中的各种不同元素的布局情况,各个元素是否在空间上具有明显可见的分割性;第二:确认表意符号的转换 (Identify Semiotic Adoption), 用以确认是否存在数学符号的使用,以及数学符号的意义来源;第三:确认表意符号是否存在混用情况 (Identify Semiotic Mixing), 借此以确认图像和文字之间的整体逻辑关系。本文也会借鉴 O'Halloran 的分析步骤,并将概念贡献作为指标,应用于实例化这个维度上。具体来说,本文的分析框架如下:首先针对相关案例,进行空间布局的分析,按照:文本元素、图像元素和公式元素进行第一阶段的切分。单个的元素会使用概念贡献对于参与者和环境的分析逻辑,确认各个参与者,以及参与者所处的环境同语境的关联程度。其次,单个案例中的符号使用情况以及符号所存储的隐藏含义会进行拆解。最后,从文本的整体角度出发,确认该案例中:图像、文字和符号作为一个整体所形成的概念贡献的具体情况,以及涉及到勾股定理所关联的语境依赖情况。通过上述三个步骤的分析,我们就可以得出某一个选定案例的语境依赖情况。各个案例之间的语境依赖程度也可以相互进行比较。另外,作为分析的框架,实例化同概念意义相结合,应用于古汉语文本的分析,可以拓展实例化的分析边界,特别是分析同概念意义分析指标所相

关的古汉语中的：参与者所呈现的语境依赖程度，以及分析古代数学文本中的所使用图像的语境依赖程度，及该图像和文字所呈现的互补关系等。

4. 案例分析

4.1 《周髀算经》中的案例分析

据江晓原(2015)所述,《周髀算经》中的共有三处提到了和勾股定理背后所蕴含知识相关的原文。案例一到三为上述原文的摘录。

案例一：《周髀算经》首次提到勾股定理的案例出现于上卷第一节

数之法出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故析矩以为勾广三，股修四，径隅五。既方其外，半之一矩。环而共盘，得成三四五。两矩共长二十有五，是谓积矩。
——引自《周髀算经》全书第一节，商高与周公谈论矩

案例二：《周髀算经》第二次提到勾股定理的案例出现于上卷第三节

若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日，从髀所旁至日所十万里。
——引自《周髀算经》全书第三节，陈子与荣方谈论周地到太阳的距离

案例三：《周髀算经》第三次提到勾股定理的案例出现于卷上第四节

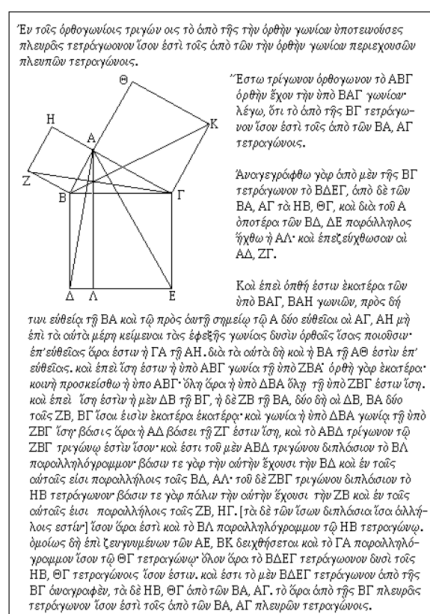
从周南至日照处三十万二千里，周北至日照处五十万八千里，东西三十九万一千六百八十三里半。
——引自《周髀算经》全书第四节，陈子与荣方谈论日落之处到周地的距离

作为我国古代数理天文领域的巨著,《周髀算经》是代表我国古代科学发展的重要著作。但对于普通读者来说,《周髀算经》本身是一部“难读之书”(江晓原,2015, p.3)。难读的原因读者除了对于古汉语语言的识读能力限制之外,还因为《周髀算经》原书中本身存在的对于专业词汇的不一致的多重表述,造成了读者的理解困难,例如书名中的关键词“周髀”,是进行天文数学测量的一种测量仪器,在现实生活中是一根垂直于地面的八尺竹竿。在原著中时而称为“竿”,时而成为“表”,又有时被称为“周髀”。第二类限制在于现存的版本中融入了后世例如:赵爽、甄鸾、李淳风、唐寅等人的评注,使得最原始版本的《周髀算经》因这些评述的存在而显得繁琐复杂。第三种限制是源自《周髀算经》的行文方式,书中的数学概念和知识大多是通过对话的方式呈现,读者需要从对话中提炼出相关的数学概念和知识。作为对比,案例四为欧几里得的《几何原本》的,希腊文原文,案例五为著名数学家 Heath 的英文译文。

4.2. 《几何原本》中的案例分析

案例四(图2)为欧几里得的《几何原本》中所记录的毕达哥拉斯定理的示例。

图 2.《几何原本》中的毕达哥拉斯定理示例（案例四）



《几何原本》的原文是希腊文写就，为便于理解，案例五（图 3）提供 Heath 的英语译本。

图 3. 毕达哥拉斯定理的英语案例，摘自 Heath (1925)（案例五）

Proposition 47.

In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.

Let ABC be a right-angled triangle having the angle BAC right; I say that the square on BC is equal to the squares on BA, AC.

For let there be described on BC the square BDEC, and on BA, AC the squares GB, HC;

[I. 46] through A let AL be drawn parallel to either BD or CE, and let AD, FC be joined.

Then, since each of the angles BAC, BAG is right, it follows that with a straight line BA, and at the point A on it, the two straight lines, AC, AG not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles; therefore CA is in a straight line with AG. [I. 14]

For the same reason BA is also in a straight line with AH. And, since the angle DBC is equal to the angle FBA: for each is right: let the angle ABC be added to each; therefore the whole angle DBA is equal to the whole angle FBC. [C.N. 2] And, since DB is equal to BC, and FB to BA, the two sides AB, BD are equal to the two sides FB, BC respectively, and the angle ABD is equal to the angle FBC; therefore the base AD is equal to the base FC, and the triangle ABD is equal to the triangle FBC. [I. 4] Now the parallelogram BL is double of the triangle ABD, for they have the same base BD and are in the same parallels BD, AL. [I. 41] And the square GB is double of the triangle FBC, for they again have the same base FB and are in the same parallels FB, GC. [I. 41]

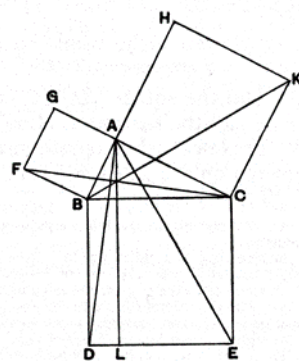
[But the doubles of equals are equal to one another.]

Therefore the parallelogram BL is also equal to the square GB.

Similarly, if AE, BK be joined, the parallelogram CL can also be proved equal to the square HC; therefore the whole square BDEC is equal to the two squares GB, HC. [C.N. 2]

And the square BDEC is described on BC, and the squares GB, HC on BA, AC. Therefore the square on the side BC is equal to the squares on the sides BA, AC.

Therefore etc.



4.3 作为参考的数学教材中的案例分析

按照现代数学的分类,无论是《周髀算经》中所涉及的勾股定理知识抑或是《几何原本》中所记载的毕达哥拉斯定理的相关知识都是属于几何学的知识。现代教材中所通常使用的典型的几何学定理呈现的方式是如图4所示。该案例摘自香港中学数学教科书(Wong & Wong, 2009)。这一类型的案例呈现方式,也同样普遍见于世界各国各地区对于勾股定理(或毕达哥拉斯定理)进行初次介绍的相关数学教材中。使用本文的分析框架,细致分析这个案例,我们可以得到一个可以参考的数学知识呈现的模型样本,该模型样本可以作为我们衡量《周髀算经》和《几何原本》中案例的标尺。

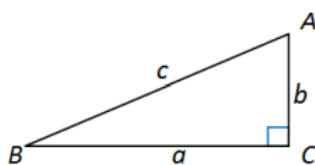
图4. 典型的几何原理的呈现方式,摘自 Wong & Wong (2009)

In a right-angled triangle, the square of the length of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the lengths of two adjacent sides.

i.e. In $\triangle ABC$, if $\angle C=90^\circ$,

then $a^2+b^2=c^2$.

(Abbreviation: Pyth. theorem)



作为模板文本的首要分析手段是切分该典型案例中的文本构成元素。图5为依托O'Halloran对于数学元素进行并置和空间布局之后的图示。

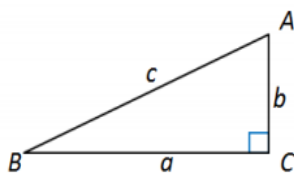
图5. 典型案例进行切分之后的元素构成

In a right-angled triangle, the square of the length of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the lengths of two adjacent sides.

i.e. In $\triangle ABC$, if $\angle C=90^\circ$,

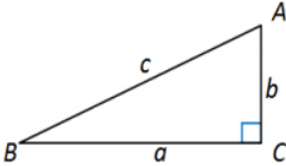
then $a^2+b^2=c^2$.

(Abbreviation: Pyth. theorem)



基于图5的示例,我们可以看到,作为典型案例的数学定理,其构成元素基本由四个部分组成:文字表述、数学公式、定理名称以及图像。基于第二步,确认案例中的表意元素以及第三步,确认是否存在图片,这两个步骤之后,表1罗列了基于整理之后的每个元素的具体内容和表意方式。

表 1. 典型案例的元素分析

标签	元素	表意方式
定理	In a right-angled triangle, the sum of the squares of the two legs is equal to the square of the hypotenuse.	文字
公式	In $\triangle ABC$, if $\angle C=90^\circ$, then $a^2+b^2=c^2$	文字和符号
名称	Reference: Pyth. theorem	文字
图像		图像和文字

通过表 1 对于典型案例中的元素拆分，我们可以发现，定理和名称的表意方式主要是通过文字的方式。相较于定理，公式中的表意资源会使用文字和符号结合的方式。图像中的表意资源除了图像外还包括了以文字存在的大小写的字母。

本文所采用的进行实例化分析的视角是采用概念贡献的手段，着重分析各个元素中的参与者、过程和环境对于勾股定理这一知识的贡献程度，以及这些元素之间的联系。

首先从环境的角度入手，在“定理”中，适用于环境的表述为 “In a right-angled triangle”，限定了该定理的适用范畴为一个直角三角形。而在“公式”中，适用于环境的表述为两种：“In $\triangle ABC$ ”以及“if $\angle C=90^\circ$ ”，“In $\triangle ABC$ ”设定了该“公式”的范围，为一个三角形，而“if $\angle C=90^\circ$ ”，则是一个前提限定条件，具体规范了 $\triangle ABC$ 中的 $\angle C$ 的特质。“图像”中的环境因素是一个独立存在的以线段、大小写字母和直角符号“ \square ”标注的三角形。在三个不同元素针对环境的表述中，我们可以发现，相较于公式和图像，定理中的对于环境的表述对于语境的依赖程度较小，并不特指某一个直角三角形。而在公式中所呈现的环境因素就较为局限：三角形被命名为“ABC”，同时“ $\angle C$ ”被设定为 90° 。这种对于语境依赖程度的逐渐加强，在图像中就更为明显，因为在图像所提供的环境，严格限定了勾股定理可以成立的唯一场所。

其次从参与者的角度入手，在“定理”中的参与者主要是两个名词词组 “the sum of the squares of the two legs” 以及 “the square of the hypotenuse.” 而“公式”中的参与者就包括了：存在于条件中的 $\angle C$ 和 90° 以及在公式中的 a^2 , b^2 , 和 c^2 。而图像中的参与者就包括了：三个角： $\angle A$, $\angle B$ 和 $\angle C$ ，三条边： a , b , 和 c ，以及三个点： A , B 和 C 。关于参与者中的 Ideational Commitment 程度，我们可以发现定理中对于参与者的表述，所采用的是名物化的手段（nominalisation）：“the sum of” 以及 “the square of”。名物化的主要的形式是将动词与形容词转换为其相对应的名词的一种语法隐喻现象，名物化的手段在科技文本中非常常见，使用名物化可以提高科学文本的专业性的同时，也可以降低对应科学知识的语境依赖程度。相对于定理中所使用的名物化手段，公式中的参与者： $\angle C$, 90° 以及 a^2 , b^2 , 和 c^2 都采用了语义转换的方式，让数学符号融入了一定的含义，以此降低数学公式中表述的复杂性。例如：“ $\angle C$ ” 对应 “角 C”，“ 90° ” 对应 “90 度”，“ a^2 , b^2 , 和 c^2 ” 分别对应 “a 平方，b 平方和 c 平方”。相较于定理中的不依赖具体语境的表述方式，虽然公式中的参与者表述方式，采用了符号融入语意的简约表述手段，但是公式中的参与者还是要依托具体语境。具体来说，公式中的语境是由参与者所处的环境所设定的，也就是上文提到的 “In $\triangle ABC$ ” 以及 “if $\angle C=90^\circ$ ”。相较于定理中的参与者所使用的

名物化手段,以及公式中的符号的使用,图像中的参与者在进行概念贡献的时候就非常的具体,不存在可以调整的空间。例如,图4中所示的直角三角形ABC的图像,使用概念贡献作为分析依据,我们会得到参与构成这个图像的各个参与者的各自的数值,例如非直角的 $\angle A$ 和 $\angle B$ 各自是多少度数,三条边:a, b, 和c各自的长度等。这些关于参与者各自特性的数值在图像中是固定的。

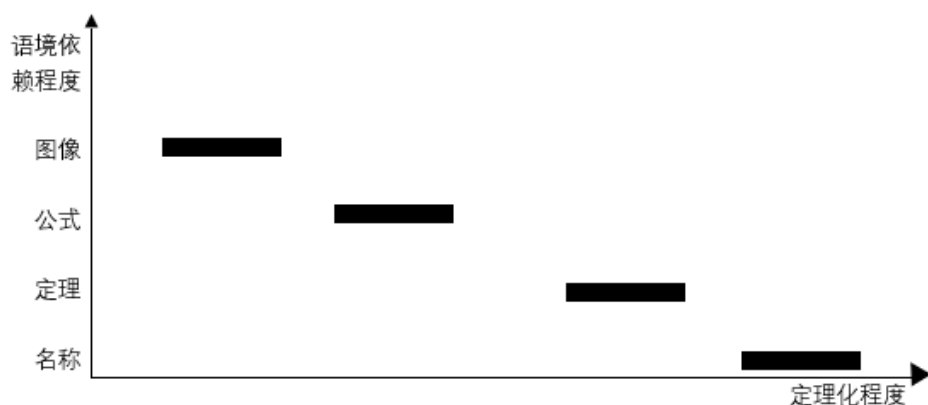
最后我们分析过程,在定理中的过程是“is equal to”,是一个表示关系的过程,表示两个参与者之间的逻辑关系。在数学公式中,“is equal to”就转换成了数学符号“=”,将数学的意义以一种更为简练的方式呈现。数学符号对于过程的简化还可见于作为运算过程的“+”对定理中名物化手段“the sum of”的替换,以及运算过程“ 2 ”对名物化手段“the square of”的替换。而图像中所呈现的“过程”这一要素主要是静止的过程。这一静止的过程代表了,如果图像是孤立的,定理和公式中同数学知识相关的运算行为,是不能够在图像中直接反应出来的。

通过对于图4这一个典型的数学知识表述方式的解析,我们可以发现,从语境依赖程度上来说:定理要低于公式,而公式要低于图像。对于一个数学原理来说,作为关键元素的“定理”,其需要描述该数学原理的普适性的适用场合,例如作为环境要素的“a right angle triangle”(一个直角三角形)与作为参与者要素的“the sum of the squares of the two legs”以及“the square of the hypotenuse”都可以不依赖于特定的直角三角形而直接存在。作为“定理”的拓展,“公式”与“图像”都通过不同的手段,将定理中抽象的数学原理以各自具象化的手段进行呈现。”公式“中适用了符号的手段,而”图像“则非常具体地呈现了一个直角三角形的案例。

需要注意的是,在图4的各种元素中,在布局中处于自上而下阅读顺序最末位置的“名称”这一元素,以文字的形式表述为:“Reference: Pyth. theorem”。这样一种表述方式是将“勾股定理”或“毕达哥拉斯定理”以一种专有名词的方式进行表述。在数学学科及其他科学学科中,专有名词的特性就在于可以词组的方式容纳定理背后的其他相关元素,这些元素包括了定理的文字表述、以数学符号为主要元素的普适性公式、对于定理进行具象化的图像。而使用专有名词的另外一个特点就是该专有名词及背后所蕴含的关于定理的相关知识,可以作为定理应用于数学中的其他领域,或者其他科学领域。因此,从语境依赖的角度来看,作为“名称”的元素其语境依赖程度是最低的。

通过对典型案例各个元素的分析,图6为将各个元素对于语境的依赖程度以及定理化的程度进行图示的效果图。需要注意的是,该图像中各个元素之间的语境依赖程度仅以高低进行排列,并不涉及各元素间语境依赖程度的具体差异,同样,各元素之间的定理化程度的不同也仅展示一个大致的结果,并不涉及具体的数值。

图6. 典型案例内的各元素之间的语境依赖程度与公理化程度的效果图



从语境依赖的角度来看，因为图像中的参与者和环境都是因为各个线段之间的连接关系而确定，因此图像的语境依赖程度最高，也不存在可以调整的空间。对于公式来说，使用数学符号的公式，因为其使用字母和数学符号限定了特定的直角三角形，因此相关数学知识只能在该特定直角三角形的范畴内有效。关于定理，因其并未限定某一个具体的直角三角形名称，适用于所有直角三角形。而作为定理名称的元素，则将定理的内容全部容纳，故可以既可以依赖于某一具体的直角三角形语境，又可以不似定理那样给定相关的文字描述，因此其语境依赖程度最低。从公理化程度这个角度进行讨论，公理化程度同语境依赖程度相辅相成，指代该定理可以直接应用于脱离于该案例进行计算的便利程度。作为元素的定理名称虽然最为抽象，但是却是定理化程度最高的元素，而定理和公式都需要进行完整表述才可以作为定理存在。故应用的时候需要具体考虑使用的场景。而图像的对于该定理的定理化程度最低。相同的一个直角三角形除了可以作为“勾股定理”或“毕达哥拉斯定理”的图示之外，还可以作为例如：直角三角形面积计算的相关图示。

5. 讨论

我们结合实例化以及实例化中的概念贡献的手段，介绍并分析了一个典型的数学定理的表述方式。通过解析这个数学定理的表意方式，我们可以将其作为我们分析本文重点材料的蓝本。案例一到案例三为《周髀算经》中涉及勾股定理知识的部分。从宏观层面来看，这三个案例，都仅使用了作为数学文本中三种基础表意资源：文字、符号和图像（O’Halloran, 2005）中的一种资源：文字。符号和图像在这三个案例中是缺失的。按照“并置和空间布局”这一指标分别对这三个案例进行检视，我们不能得到各种不同表意资源之间的明晰分割线。同样，表意符号的转换所关注的符号和文字之间的转换关系以及表意符号的混合所关注的图像和文字之间的逻辑关系，在上述三个案例中也无法分析。我们只能依赖分析的第四个步骤，即：分析存在于三个案例中的，以文字作为载体的概念贡献的情况。不过，由于数学文本本身的多模态表意资源的特性，前序三个分析步骤，可以帮助读者较为容易地分辨数学文本的元素构成方式，表意方式，以及通过典型案例所分析并得出结论的，各个不同元素之间的语境依赖程度以及定理化程度。欠缺前序三个分析步骤的依托，也从一个侧面反映出作为古代数学经典的《周髀算经》在其同典型案例相比较之下，其表意方式上的迂回和模糊。分析蓝本中的第四步是使用概念贡献的手段进行《周髀算经》相关案例的分析，分析的指标还是按照环境，参与者以及过程开展。这三个案例中同勾股定理知识相关的环境要素、参与者要素和过程要素在表 2 中陈列。

表 2.《周髀算经》关于勾股定理相关内容的概念贡献示例

	环境	参与者	过程
案例一	数之法出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一	“勾”“三”；“股”“四”；“径”“五”；“积矩”	“方”，“半”，“环”，“两矩”；“二十有五”；“成”
案例二	若求邪至日者，以日下为勾，日高为股	“勾股”	“乘”，“并”“开方除”
案例三		三十九万一千六百八十三里半 三十万二千里 五十万八千里	

首先需要说明的是,《周髀算经》中所指代的“勾”与“股”指代的是直角三角形中的两条直角边,“勾”为短边,“股”为长边,斜边称为“径”或“邪”,后世的学者也有将斜边称为“弦”(例如:赵爽对《周髀算经》的评注就将斜边称为“邪”)。案例一中的环境要素主要包括两个方面,第一个方面陈述了古代数学的渊源:来源于“圆方之术”。第二方面描述了“圆方之术”的三个层次:“圆”来源于“方”,“方”来源于“矩”,“矩”来源于“九九八十一”。上述表述中,“矩”是指两条线段相交成直角之后的图案,类似于曲尺。“九九八十一”特指两数相乘。因此,案例一中的环境要素,将“矩”的来源以及“矩”的运算法则进行的描述。案例一中的参与者要素则是具体到了勾股定理应用的一个特例:

“勾三”;“股四”;“径五”,这个在数学史上非常著名的特例,若使用数学公式表述,则如此公式: $3^2+4^2=5^2$,该公式中的“ 2 ”,在过程这一要素中,表述为“方”。总体来说,案例一中对于勾股定理的表述,是将运算的法则以环境条件的方式提供给读者,再将勾股定理以一种特例的方式展现。这种呈现方式,按照江晓原的看法,“毫无疑问是一种特例,并不是勾股定理的普适性表述”(2015, p.35)。特例的呈现方式,还见于案例三的“参与者”中。原文中,案例三是周地东西之间的举例,以及周地距离太阳之间距离等相的相关数值。这三个数值之间大致存在着一种平方和的关系,可以引证勾股定理进行计算得出。江晓原也认为,通过计算上述三个数值之间的关系,可以假定《周髀算经》得出了勾股定理的普适性特质。但是原文中并没有具体和明确的陈述。案例三种的“参与者”要素归根到底也是同案例一种的“参与者”要素一样,是属于特例的情况。相较于案例一和案例三的关注点都落在具体特例,案例二有其特殊性。从环境要素来看,案例二首先给定了一个条件环境要素,“如果要计算周地到太阳的斜线距离”,然后给出两个假设条件:“周地至日下的距离为勾,太阳到地面的垂直距离为股”,“勾”与“股”作为参与者,参与到运算中:将勾、股的平方之和再开平方,就得到斜线的距离。同时,案例二还给出了周地到太阳的斜线距离的具体数值。如果用数学公式进行表述的话,案例二可以写作如下公式:

联系案例二中的“过程”要素中,该公式和案例二中过程的对应关系如下:“乘”指“ 2 ”(平方符号),“并”指“+”(加号),“开方除”指:“ $\sqrt{\quad}$ ”(开平方)。相较于案例一和案例三,案例二不但以“过程:元素给出了勾股定理运算的普适性定理,同时“参与者”元素也不限定在具体的数值,而是使用了“勾”,“股”,“邪”命名了直角三角形的三条不同的边。

如果我们将《周髀算经》中对于勾股定理表述的三个案例视作是三个孤立的个体的话,案例一和案例三,仅是勾股定理的两次实例化的展示,而案例二不仅有独立的实例,又有一个脱离实际案例的抽象化的运算定理。如果将三个案例整合在一起进行考虑的话,勾股定理相关知识在《周髀算经》中的实例化现象就是以三个实例结合一个抽象化的定理进行呈现的。参考图三对典型数学知识案例呈现的方式,我们可以发现,从语境依赖程度来看,《周髀算经》中已经形成了可以脱离语境的定理(参考案例二),另外还有三个极度依赖语境的实际实例。不过相较于典型案例,《周髀算经》未使用数学公式和相关图像,同时也未能形成一个涵盖所有相关知识的定理名称。

参考案例四和案例五,《几何原本》中“毕达哥拉斯定理”的呈现则相对《周髀算经》来说要清晰与明确,例如,从资源分布来看,名称、定理、图示以及定理的证明都相对清楚地呈现在同一个物理界面中呈现。同时,《几何原本》将该定理命名为“定理47”(Proposition 47),这种使用专有名词进行命名的方式,使得该定理的相关知识和内容都可以由该专有名词容纳,提高了该定理的定理化程度,同时大大降低了定理的语境依赖程度。在定理的表述上,环境要素也是使用了“a right angle triangle”这样一种不依赖于特定三角形的表述。参与者要素也使用了名物化的手段:“the square on the side subtending the right angle”以及“the squares on the sides containing the right angle”使得定理的适用性不依赖于特定的三角形。该定理使用了一个新的元

素：证明。碍于篇幅，仅分析证明中的参与者。在原文的证明中，作者使用了较多的无理数命名方式，指代线段和图像，例如：the square BDEC, the side BD, the angle BDE 等，相较于《周髀算经》中对于具体案例的成列，使用无理数的方式，可以使该定理的适用范围不限于具体的数值。另外，无理数的使用也使得读者可以清晰地明确“证明”同“图像”之间的一一对应关系，使图像的表意方式更为清晰。相较于典型案例，《几何原本》中“毕达哥拉斯定理”的呈现，欠缺了符号化公式这一元素。

6. 总结

本文从学术界对于“勾股定理”这一重要数学知识的命名权争论的角度入手，使用系统功能语言学实例化作为维度，并使用概念贡献作为分析工具，针对《周髀算经》与《几何原本》上同该知识相关的案例进行分析。同时本文参考了现有教育领域中最典型的案例作为蓝本，比照《周髀算经》与《几何原本》上针对该知识的实例化程度。本文发现，《周髀算经》上的三个案例，从整体的角度来看，可以视作是一个定理附带三个具体例子。定理的表述方式可以脱离具体语境存在，而三个具体的例子则是“勾股定理”的特例。特别是案例一中的：“勾三股四径五”的案例，已成为数学史中的经典案例，相关对于命名权的争论也是由此案例展开。而在《几何原本》中的相关知识的实例，则更贴合典型案例的蓝本。《几何原本》中使用了：专有名词、定理表述以及对应图像，同时还详细陈列了证明的过程。同典型案例相比，《几何原本》中对于数学定理的表述方式，更贴合一个定理的构成要件。

本文对于汉语教学的启发作用在于，本文并不是要给予“勾股定理”命名权这一数学史上的经典争论一个优先级判断。本文是想通过实例化的分析手段，能够使读者使用概念贡献的手段分析每一个实例中各个元素的语境依赖程度，并从语境依赖程度这个角度，理解数学定理的表述方式。这种理解数学定理的方式，既可以应用在英语中，也可以应用在古汉语中。对于读者的要求仅仅是提炼出原文实例中的“参与者”、“过程”和“环境”，再依据语境依赖程度进行分析，就可以得出抽象的概念和具体的实例，便于读者从“勾三股四弦五”这样的数字的案例，提炼出抽象的“勾股定理”或“毕达哥拉斯定理”的理解，并可以从无理数的角度进行其他类似案例的再应用（夏立，2020）。

基金信息

本研究受深圳职业技术学院校级科研启动项目（项目编号：6022312003S）资助。

参考文献

- Chang, C. G. (2011). Commitment in Parallel Texts – A study of Pride and Prejudice and its adaptations. *Studies in Functional Linguistics and Discourse Analysis*, (3).
- Halliday, M. A. K. (1991). The notion of context in language education. In T. Le & M. McCausland (Eds.), *Language education: Interaction and development. Proceedings of the international conference*. Ho Chi Minh City, Vietnam.
- Halliday, M. A. K. (2007). Some reflections on language education in multilingual societies, as seen from the stand point of linguistics. In J. Webster (Ed.), *Language and education (Vol. 9 of the Collected Works of M.A.K Halliday)*. Continuum.

- Heath, T. L. (1956). *Euclid: The thirteen books of the elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Vol. 1.* Dover Publications.
- Kress, G. (2007). Meaning, learning and representation in a social semiotic approach to multimodal communication. In R. Whittaker, M. O'Donnell & A. McCabe (Eds.), *Advances in language and education* (pp. 15–39). London Continuum.
- Martin, J. R. (2006). Genre, ideology and intertextuality: a systemic functional perspective. *Linguistics and the Human Sciences* 2(2), 275–298.
- Martin, J. R. (2008). Innocence: realisation, instantiation and individuation in a Botswanan Town. In A. Mahboob & N. Knight (Eds), *Questioning linguistics* (pp. 32–76). Cambridge Scholars Publishing.
- O'Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. Continuum.
- O'Halloran, K. (2007). Mathematical and scientific forms of knowledge: a systemic functional multimodal grammatical approach. In F. Christie & J. R. Martin (Eds.), *Language, knowledge and pedagogy: Functional linguistic and sociological Perspectives* (pp. 205–236). Continuum.
- Painter, C., Martin, J. R., & Unsworth, L. (2013). *Reading visual narratives: Image analysis in children's picture books*. Equinox.
- Posamentier, A. S. (2010). *The Pythagorean Theorem*. Prometheus Books.
- de Souza, L. M. F. (2010). *Interlingual re-instantiation: A model for a new and more comprehensive systemic functional perspective on translation*. Universidade Federal de Santa Catarina, PhD thesis.
- Wang, P. (2021). Instantiation and individuation in Buddhist scripture translation: A cross-comparison of the Sanskrit ST and English and Chinese TTs of the *Heart Sutra*. *Language, Context and Text: The Social Semiotics Forum*, 3(2): 227–246. DOI: 10.1075/langct.20004.wan
- Wong, T. W. and Wong, M. S. (2009). *New century: Mathematics*. Oxford University Press.
- Xia, L. (2018). *Knowledge and representations: The meaning making process in the curriculum of mathematics*. Unpublished PhD Thesis. The Hong Kong Polytechnic University.
- Xia L. (2021). Complete the incompleteness and de-vague the vagueness: Towards a social semiotic perspective on mathematical questions. 赖良涛、严明、江妍主编《教育语言学研究(第四辑)》，上海交通大学出版社。
- 蔡宗熹 (2009) 《千古第一定理——勾股定理》，高等教育出版社。
- 程纶 (1951) 毕达哥拉斯定理应改称商高定理，《中国数学杂志》，卷一：12–13。
- 江晓原 (2015) 《〈周髀算经〉新论·译注》，上海交通大学出版社。
- 王汐 (2018) 实例化、实现化与个体化三维翻译视角——以《道德经》英译为个案，《外语教学》，2：86–90。
- 夏立 (2020) 数学与编程：应对未来的挑战，《中小学信息技术教育》，11：21–23。
- 章鸿钊 (1951) 周髀算经上勾股普遍定理：陈子定理，《中国数学杂志》，卷一：13–14。

投稿：2021年10月29日；接受：2022年11月28日；出版：2022年12月30日

作者简介

夏立，男，江苏江阴人，2018年于香港理工大学英语系获得哲学博士学位，现任深圳职业技术学院商务外语学院商务英语专业专任教师，研究兴趣包括教育语言学、多模态研究、教师教育、学科英语等。

Understanding Knowledge Construction from the Perspective of Instantiation: Cases of Pythagoras Theorem in Ancient Classics

Li Xia

Shenzhen Polytechnic, China

Abstract

This paper explores how Pythagoras Theorem is represented in two ancient mathematics classics: *Elements* and *Zhou Bi Suan Jing* from the perspective of Instantiation. This paper suggests that Instantiation is a valuable method in understanding the relationship between abstract knowledge and concrete representations even for ancient Chinese discourse. This paper also suggests that the same knowledge can be represented differently based on different contextual dependency level, offering a linguistic perspective in understanding the relationship between knowledge and representation.

Keywords

Instantiation, Pythagoras Theorem, mathematics classics, multimodal representation, knowledge construction

Dr. Li Xia received his Degree of Doctor of Philosophy from Department of English, The Hong Kong Polytechnic University in 2018. He is now the lecturer in School of Foreign Languages and Business, Shenzhen Polytechnic. His research interests include Educational Linguistics, Multimodal and Multisemiotic Research, Teacher Education and English for Specific and Academic Purposes.

References

- Cai, Zongxi (蔡宗熹). (2009). 千古第一定理——勾股定理 [The greatest theorem of all time: The Pythagorean theorem]. 高等教育出版社 [Higher Education Press].
- Chang, C. G. (2011). Commitment in Parallel Texts – A study of Pride and Prejudice and its adaptations. *Studies in Functional Linguistics and Discourse Analysis*, (3).
- Cheng, Lun (程纶). (1951). 毕达哥拉斯定理应改称商高定理 [The Pythagorean theorem should be renamed the Shang Gao theorem]. 中国数学杂志 [Acta Mathematica Sinica], 1, 12–13.
- de Souza, L. M. F. (2010). *Interlingual re-instantiation: A model for a new and more comprehensive systemic functional perspective on translation*. Universidade Federal de Santa Catarina, PhD thesis.
- Halliday, M. A. K. (1991). The notion of context in language education. In T. Le & M. McCausland (Eds.), *Language education: Interaction and development. Proceedings of the international conference*. Ho Chi Minh City, Vietnam.
- Halliday, M. A. K. (2007). Some reflections on language education in multilingual societies, as seen from the stand point of linguistics. In J. Webster (Ed.), *Language and education (Vol. 9 of the Collected Works of M.A.K Halliday)*. Continuum.
- Heath, T. L. (1956). *Euclid: The thirteen books of the elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Vol. 1*. Dover Publications.
- Jiang, XI (王汐). (2018). 实例化、实现化与个体化三维翻译视角——以《道德经》英译为个案 [Instantiation, Actualization, and Individualization in Translation: A Case Study of the Dao De Jing in English]. 外语教学 [Foreign Language Teaching], 2, 86-90.
- Jiang, Xiaoyuan (江晓原). (2015). <周髀算经>新论·译注 [A new study and annotated translation of the Zhoubi suanjing]. 上海交通大学出版社 [Shanghai Jiao Tong University Press].
- Kress, G. (2007). Meaning, learning and representation in a social semiotic approach to multimodal communication. In R. Whittaker., M. O'Donnel. & A. McCabe (Eds.), *Advances in language and education* (pp. 15–39). London Continuum.
- Martin, J. R. (2006). Genre, ideology and intertextuality: A systemic functional perspective. *Linguistics and the Human Sciences* 2(2), 275-298.
- Martin, J. R. (2008). Innocence: realisation, instantiation and individuation in a Botswana Town. In A. Mahboob & N. Knight (Eds), *Questioning linguistics* (pp. 32-76). Cambridge Scholars Publishing.
- O'Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. Continuum.
- O'Halloran, K. (2007). Mathematical and scientific forms of knowledge: a systemic functional multimodal grammatical approach. In F. Christie & J. R. Martin (Eds.), *Language, knowledge and pedagogy: Functional linguistic and sociological Perspectives* (pp. 205-236). Continuum.
- Painter, C., Martin, J. R., & Unsworth, L. (2013). *Reading visual narratives: Image analysis in children's picture books*. Equinox.
- Posamentier, A. S. (2010). *The Pythagorean Theorem*. Prometheus Books.
- Wang, P. (2021). Instantiation and individuation in Buddhist scripture translation: A cross-comparison of the Sanskrit ST and English and Chinese TTs of the Heart Sutra. *Language, Context and Text: The Social Semiotics Forum*, 3(2): 227–246. DOI: 10.1075/langct.20004.wan
- Wong, T. W. & Wong, M. S. (2009). *New century: Mathematics*. Oxford University Press.
- Xia L. (2021). Complete the incompleteness and de-vague the vagueness: Towards a social semiotic perspective on mathematical questions. 赖良涛、严明、江妍主编《教育语言学研究(第四辑)》 [In Lai Liangtao, Yan Ming, & Jiang Yan (Eds.), *Educational Linguistics Research*, Vol 4.], 上海交通大学出版社 [Shanghai Jiao Tong University Press].
- Xia, L. (2018). *Knowledge and representations: The meaning making process in the curriculum of mathematics*. Unpublished PhD Thesis. The Hong Kong Polytechnic University.
- Xia, Li (夏立). (2020). 数学与编程:应对未来的挑战 [Mathematics and programming: Meeting the challenges of the future]. 中小学信息技术教育 [Primary and Secondary School Information Technology Education], 11, 21-23.

Zhang, Hongzhao (章鸿钊). (1951). 周髀算经上勾股普遍定理:陈子定理 [The general Pythagorean theorem in the Zhoubi suanjing: Chen Zi's theorem]. 中国数学杂志 [Acta Mathematica Sinica], 1, 13–14.